TABLEUR : SERIE DE FOURIER

I – THEOREME DE FOURIER

Un signal périodique quelconque de pulsation ω est constitué d'une superposition de fonctions sinusoïdales, d'amplitude et de phase à l'origine fonction de la forme d'onde du signal, et de pulsations $n\omega$. (n entier Σ 0).

On écrit :

$$\boxed{\mathbf{y(t) = Y_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \cos(n\omega t + \varphi_n)}}}$$

Valeur moyenne du signal ou composante continue

Variations autour de la valeur moyenne

$Y_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ est une des composantes sinusoïdales du signal y(t) appelé harmonique de rang n.

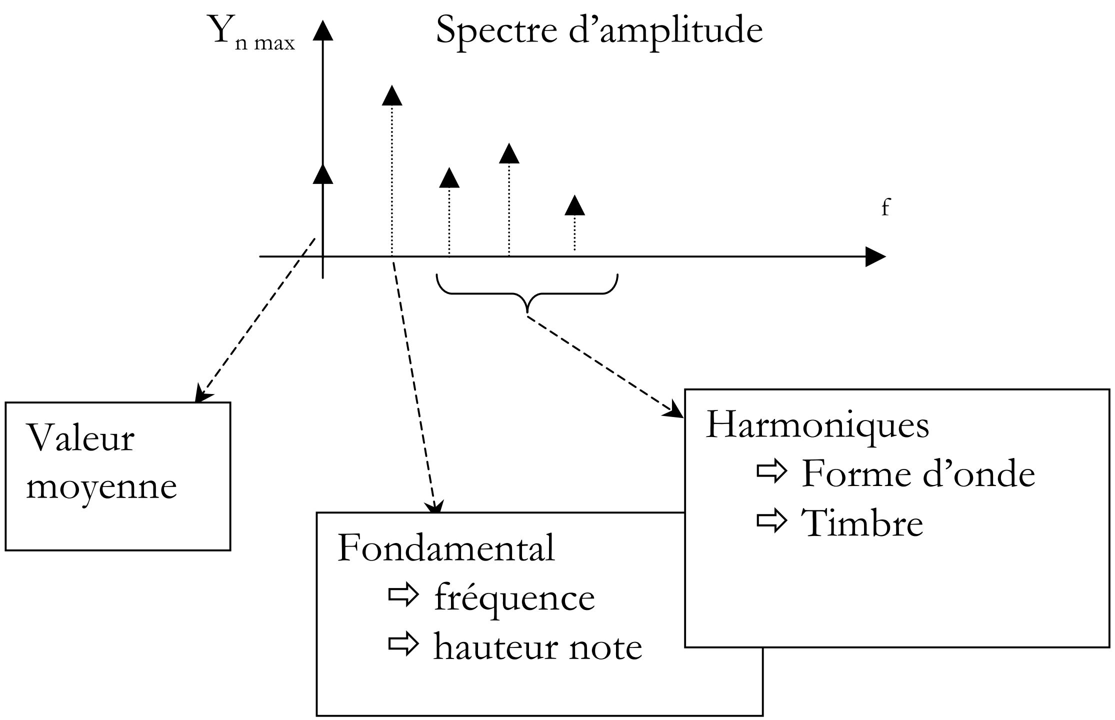
Chaque harmonique correspond à une raie dans le spectre de y.
Chaque harmonique est caractérisée par :

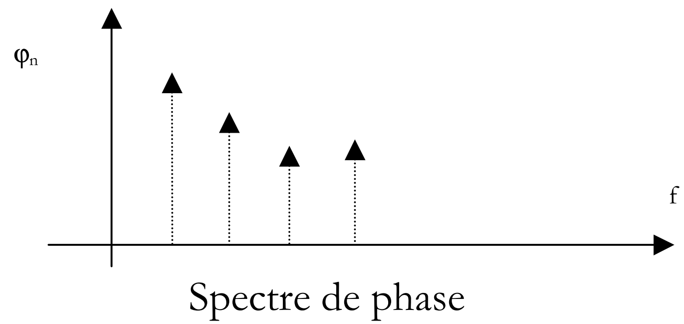
- *son rang n*
- *son amplitude Y_n*
- *sa phase à l'origine φ_n*
- *sa pulsation $\omega_n = n\,\omega$*

L'harmonique de rang 1 est appelé fondamental du signal y.
C'est le fondamental qui impose la pulsation, la fréquence et la période du signal.

La trompette jouant un "la" à 440 Hz : signal périodique

fondamental : sinusoïde de fréquence 440 Hz.
Harmoniques : sinusoïdes aux fréquences multiples de 440 Hz





Ce sont les harmoniques de rang supérieur ou égal à 2 qui, par leurs amplitudes et phases à l'origine, déterminent le son (le timbre) de l'instrument.

Détermination de l'amplitude et de la phase des harmoniques

Comme énoncé dans le théorème de Fourier, les amplitudes et phases des harmoniques d'un signal périodique dépendent de la forme d'onde c'est à dire de l'évolution temporelle du signal. Ainsi les domaines temporel et fréquentiel sont intimement liés.

On retrouve ce lien dans les expressions mathématiques permettant de déterminer $Y_{n\,max}$ et φ_n .

Pour écrire ces relations mathématiques, il convient d'écrire différemment le théorème de Fourier :

$$\mathbf{y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \cos (n\omega t + \varphi_n) \qquad = Y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t}$$

On a alors :

$$a_n = (2/T) \int_{(T)} y(t) \cos n\omega t \, dt$$

$$b_n = (2/T) \int_{(T)} y(t) \sin n\omega t \, dt$$

$$Y_{n\,max} = \sqrt{ (a_n^2 + b_n^2) }$$

$$\varphi_n = \mathrm{atan} (- b_n / a_n)$$

Il est effectivement nécessaire de connaître y(t) pour calculer les coefficients an et bn permettant de déterminer l'amplitude et la phase de chaque harmonique : a_n et b_n dépendent bien de la forme d'onde du signal.

II – CAS D'UN SIGNAL RECTANGULAIRE PERIODIQUE

La décomposition en série de Fourier du signal rectangulaire s'écrit :

$$y(t) = Y_{moy} + Y_{max} [\cos \omega t - 1/3 \cos 3\omega t + 1/5 \cos 5\omega t - 1/7 \cos 7\omega t + 1/9 \cos 9\omega t - \ldots]$$

Reconstituer une période du signal rectangulaire périodique, état haut 10V, état bas 0V, fréquence 100 Hz, par addition des termes de la série de Fourier : On testera la reconstitution à partir de 5 harmoniques puis 10 puis 20.

III – CAS D'UN SIGNAL TRAINGULAIRE PERIODIQUE

Même question pour un signal triangulaire périodique dont la décomposition s'écrit :

$$y(t) = \sin(x) - 1/3^2 \sin(3x) + 1/5^2 \sin(5x) - \ldots$$

http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Analyse/Fourier.htm
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Elec/Fourier/fourier1.html

IV – Même travail en LabVIEW